FISICA CUANTICA II
CONTROL DE MAYO, CUESTIONES

CURSO 2021/2022 19 de Mayo de 2022

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.

Esta prueba cuenta un 25% de la nota del control final.

1[3].- Sea A el operador cuya representacion matricial es:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

Calculese la exponencial $e^{2\pi i A}$.

2[4].- Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano:

$$H = \hbar \left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right) ,$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert bidimensional. En el instante inicial $t = 0$ su vector de estado es:

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle .$$

Obtengase el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ para instantes de tiempo $t \geq 0$ y determinense los valores de t para los cuales $|\psi(t)\rangle$ vuelve a su valor inicial $|\psi(0)\rangle$.

3[3].- Considerese un oscilador armonico unidimensional con operadores escalera a y $a^\dagger$ y niveles de energia $|n\rangle$, con $n \geq 0$. Definamos el operador

$$U = e^{i\lambda\, a^\dagger a^2 a^\dagger} ,$$

siendo λ un numero real.

a) ¿Es U un operador unitario?. Justifiquese la respuesta.

b) Calculese $U\,|n\rangle$

Sea A la matriz

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

Calcúlese $e^{2\pi i A}$

Diagonalicemos A

$$\det(A - \lambda I) = \left(5/4 - \lambda\right)^2 - \frac{9}{16} =$$

$$= \frac{25}{16} + \lambda^2 - 5/2\,\lambda - \frac{9}{16} = \lambda^2 - 5/2\,\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{5/2 \pm \sqrt{25/4 - 4}}{2} = \frac{1}{2}\left(5/2 \pm \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{25-16}}_{\sqrt{9}=3}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{4}(5 \pm 3) = \begin{cases} 2 = \lambda_1 \\ 1/2 = \lambda_2 \end{cases} \leftarrow \underline{\text{autovalores}}$$

Obtengamos los autovectores

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$5/4\,a + 3/4\,b = 2a \Rightarrow \underbrace{\left(5/4 - 2\right)}_{-3/4}a + 3/4\,b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1/2}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{5}{4}c + \frac{3}{4}d = \frac{1}{2}c \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(5/4 - 1/2\right)}_{\frac{5-2}{4} = 3/4} c + 3/4\, d = 0 \Rightarrow \boxed{c = -d = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Utilizando la representacion espectral

$$e^{2\pi i A} = \underbrace{e^{2\pi i \lambda_1}}_{e^{4 i \pi} = 1} |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| + \underbrace{e^{2\pi i \lambda_2}}_{e^{i\pi} = -1} |\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| =$$

$$= |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| - |\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1,-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1/2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{2\pi i A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1}$$

Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano

$$H = \hbar\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal de estados. En el instante inicial su vector de estado es

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$$

Obtengase el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ para valores del tiempo $t \geq 0$ y determinese los valores de t para los cuales $|\psi(t)\rangle$ vuelve a su valor inicial $|\psi(0)\rangle$

Los autoestados de H son

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Pues, dado que $H|1\rangle = \hbar|2\rangle$, $H|2\rangle = \hbar|1\rangle \Rightarrow$

$$\boxed{H|+\rangle = \hbar|+\rangle} \qquad \boxed{H|-\rangle = -\hbar|-\rangle} \qquad \boxed{\begin{array}{l} E_+ = \hbar \\ E_- = -\hbar \end{array}}$$

Para ver la evolucion temporal expresamos $|\psi(0)\rangle$ en terminos de $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Como

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

Evolucion temporal

$$|\pm\rangle \rightarrow e^{-i/\hbar\, E_\pm t}|\pm\rangle = e^{-i/\cancel{\hbar}(\pm\cancel{\hbar})t}|\pm\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{|\pm\rangle \rightarrow e^{\mp i t}|\pm\rangle}$$

$\Rightarrow$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}|+\rangle + e^{it}|-\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}(|1\rangle+|2\rangle) + e^{it}(|1\rangle-|2\rangle)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-it}+e^{it}\right)}_{\cos t}|1\rangle + \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-it}-e^{it}\right)}_{-i\,\text{sen}\,t}|2\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \cos t\,|1\rangle - i\,\text{sen}\,t\,|2\rangle}$$

$|\psi(t)\rangle \sim |1\rangle$ si $\boxed{t = n\pi \quad, n = 0, 1, 2 \cdots}$

Considerese un oscilador armonico unidimensional con operadores escalera a y a^+ y niveles de energia $|n\rangle$.
Definamos el operador

$$U = e^{i\lambda\, a^+ a^2 a^+} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) ¿Es U unitario?

b) Calculese $U|n\rangle$

---

a) U es unitario si $a^+a^2a^+$ es hermitico. Reescribamos este operador en la forma

$$a^+a^2a^+ = a^+ a \underbrace{a a^+}_{\underbrace{[a,a^+]}_{1} + a^+ a} = a^+a(1+a^+a) = a^+a + (a^+a)^2 =$$

$$= N + N^2 \qquad \text{con} \quad N = a^+a \rightarrow \text{operador numero}$$

Como N es hermitico $\Rightarrow$ $a^+a^2a^+$ tambien lo es

$\Rightarrow$ $\boxed{U \text{ unitario}}$

b) $U = e^{i\lambda(N^2+N)}$, con $N|n\rangle = n|n\rangle$ $\Rightarrow$

$$\boxed{U|n\rangle = e^{i\lambda n(n+1)}|n\rangle}$$